# 1階準線型方程式の初期値問題のWeak Solutionの存在について (数値解析の基礎理論および偏微分方程式の数値解法シンポジウム)



小島, 清史

数理解析研究所講究録
18巻 1966年 113-130



# 1階準線型方程式の初期値問題の weak solution の存在について

航空宇宙技研　小島 清史

## 1 序論

最近 準線型双曲型偏微分方程式に対する初期値問題の不連続な解に、多くの関心が払われるようになり、1空間次元の場合の conservation type の1階準線型方程式に対しては、shock 以外の不連続をもたない（つまり entropy condition を満たす）weak solution の一意性と存在が証明された[1)]。

空間変数が2以上の場合には、Conway & Smoller [1] が初期値 $u_0(x)$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, が有界可測かつ、Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動ならば初期値問題

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f^i(u)}{\partial x_i} = 0 \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{1.2}$$

1) Oleinik の総合報告 [3] 参照

の weak solution が存在するということを差分法を用いて、証明した。ある関数 $f(x_1,\ldots,x_n)$ が $R^n$ において、Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動であるというのは、$R^n$ 内の任意のコンパクト集合 K に対して、測度 0 の集合 N が存在して関数

$$V^i(x_1,\ldots x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \operatorname*{Var}_{K-N} f(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

$$i = 1,\ldots,n$$

が、可測かつ可積分なことである。ここでこのような関数全体の集合を $\mathcal{F}$ で表わすことにする。

ここでの目的は、領域

(1.3) $$G = \{(t,x);\ 0 \le t \le T < \infty,\ -\infty < x_i < +\infty,\ i = 1,\ldots,n\}$$

において 次の様な初期値問題の weak solution の存在を示すことである。

(1.4) $$u_t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f^i(t,x,u) + g(t,x,u) = 0$$

(1.5) $$u(0,x) = u_0(x) \in \mathcal{F}$$

ここで $f^i$, $i = 1,\ldots,n$ と g は次にあげる条件 i), ii) を満たしていると仮定する。

i) $f^i$, $g$ とこれらの導関数 $f^i_{x_j}$, $f^i_n$, $f^i_{x_j x_k}$, $f^i_{x_j n}$ $g_{x_j}$, $g_n$, $i,j,k = 1,\dots,n$ はすべての $n$ の値と G 内の $(t,x)$ に対して連続で、かつ有界な $u$ の値に対して、G 内の $(t,x)$ に関して一様有界。

ii) $v \geq 0$ に対して定義された次のような、連続微分可能な関数 $V(v)$ が存在する。

$$\max_{\substack{(t,x)\ G \\ |u| \leq v}} \left| \sum_{i=1}^{n} f^i_{x_i} + g \right| \leq V(v), \quad V'(v) \geq 0$$

かつ任意の $v_0 \geq 0$ に対して

$$\int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = \infty \qquad (1.6)$$ [2)]

すなわち

定理. $f^i$, $i = 1,\dots,n$, $g$ が条件 i), ii) を満たしている時、$u_0 \in$ 歹 ならば次のような (1.4) (1.5) の weak solution $u(t,x)$ が存在する。

(1) $u(t,x)$ は G 内で有界可測、かつ Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動.

(2) 任意の $t$, $(0 \leq t \leq T)$ に対して $u(t,x) \in$ 歹.

2) この条件は、Vvedenskaya [4] の条件である。

この定理は、Conway & Smaller [1] におけると同様に、差分法を用いて証明される。

[1] を見れば明らかなように、上の定理を証明するには [1] における、差分方程式の解の評価に関する補題 1, 2, 4 に対応する補題を証明すれば十分である。

以下、簡単のために、$n = 2$ の場合について、その証明をのべるが、$n \geq 3$ の場合も、まったく同様である。

## 2. 問題の説明と差分方程式

領域

$$G = \{(t,x,y);\ 0 \le t \le T < \infty,\ -\infty < x,y < \infty\}$$

において 初期値問題

$$(2.1) \qquad u_t + \frac{\partial}{\partial x} f(t,x,y,u) + \frac{\partial}{\partial y} g(t,x,y,u) + h(t,x,y,u) = 0$$

$$(2.2) \qquad u(0,x,y) = u_0(x,y) \in \mathcal{F}$$

を考える。ここで f, g, h は前節の条件 i), ii) を満たしていると仮定する。すなわち

i)' f, g, h とこれらの偏導関数 $f_x$, $f_y$, $f_u$, $f_{xx}$, $f_{xy}$, $f_{yy}$, $f_{xu}$, $f_{yu}$, $g_x$, $g_y$, $g_u$, $g_{xx}$, $g_{xy}$, $g_{yy}$, $g_{xu}$, $g_{yu}$, $h_x$, $h_y$ と $h_u$ はすべての u の値と G 内の (t,x,y) に対して連続で、かつ有界な u に対して G 内の (t,x,y) に関して一様有界

ii)' $v \geqq 0$ に対して定義された次の様な1階連続微分可能な関数 V(v) が存在する。

$$\max_{\substack{(t,x,y)\in G \\ |u|\le v}} |f_x+g_y+h| \le V(v) \qquad V'(v) \ge 0$$

かつ 任意の $v_0 \ge 0$ に対して

$$(2.3) \qquad \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{V(v)} = \infty$$

(2.3) より，容易に任意の $M^0$, $\alpha > 0$ に対して，正の数 $M$ が存在して

$$(2.4) \qquad \int_{M^0}^{M} \frac{dv}{V(v) + \alpha} \geq T$$

が成立することが確かめられる。[3)]

今，$\Omega = \{(t,x,y,u);\ (t,x,y) \in G,\ |u| \leq M\}$ という $(t,x,y,u)$ 空間内の領域に対し

$$(2.5) \qquad \frac{A}{2} = \max_{\Omega} |f_u|, \quad \frac{B}{2} = \max_{\Omega} |g_u|$$

と定義された２つの定数 A, B を用いて，

$$x' = x + (A/2)t, \quad y' = y + (B/2)t, \quad t' = t$$

なる変数変換を行ない (2.1) 式を $(t',x',y')$ を使って書き改めれば，

$$(2.1)' \qquad u_{t'} + \frac{\partial}{\partial x'}[f'(t',x',y',u) + \tfrac{A}{2}u] + \frac{\partial}{\partial y'}[g'(t',x',y',u) + \tfrac{B}{2}u] + h(t',x',y',u) = 0,$$

$$f'(t',x',y',u) = f(t',x'-\tfrac{A}{2}t',y'-\tfrac{B}{2}t',u), \quad g'(t',x',y',u) = g(t',x'-\tfrac{A}{2}t',y'-\tfrac{B}{2}t',u)$$

3) Douglis [2; sec 3] 参照。

となる。

そこで、$F = f' + \frac{A}{2}u$, $G = g' + \frac{B}{2}u$ とおけば、

$0 \leq F_u \leq A$, $0 \leq G_u \leq B$ が $\Omega$ 内で成立する。従がって、一般性を失なうことなしに、(2.1) において

(2.6) $\quad 0 \leq f_u \leq A, \quad 0 \leq g_u \leq B \quad \text{in } \Omega$

としてよい。[4)]

$u(t,x,y)$ が (2.1), (2.2) の weak solution であるとは、$t = T$ で $0$ であるような任意の関数 $\phi = \phi(t,x,y) \in C_0^1$ に対して $u$ が関係式

(2.7) $$\iiint_G [u\phi_t + f\phi_x + g\phi_y - h\phi]dxdydt + \iint_{t=0} u_0(x,y)\phi(0,x,y)dxdy = 0$$

を満たすことである。

領域 $G$ 内に、格子領域

$$G_{p,q,r} = \{(kr,mp,nq);\ k = 0,1,\ldots,[T/r],\ m,n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\ p,q,r > 0\}$$

を定義する。

4) Douglis [2; sec 3] 参照

$G_{p,q,r}$ 上で差分方程式

$$(2.8)\quad \frac{u_{m,n}^{k+1} - u_{m,n}^{k}}{r} + \frac{f_{m,n}^{k} - f_{m-1,n}^{k}}{p} + \frac{g_{m,n}^{k} - g_{m,n-1}^{k}}{q} + h_{m,n}^{k} = 0$$

を考える。ここで

$$u_{m,n}^{k} = u(kr, mp, nq),\ f_{m,n}^{k} = f(kr, mp, nq, u_{m,n}^{k}),\ \text{etc.}$$

の記号を用いた。

## 3. 差分方程式の解の評価

補題 1. p,q,r が stability condition

(3.1) $$\frac{r}{p}A + \frac{r}{q}B < 1$$

を満足するとき、$\max_{m,n} |u^0_{m,n}| \leq M^0$ ならば $\max_{m,n,k} |u^k_{m,n}| \leq M$

証明. (2.8) より

(3.2) $$u^{k+1}_{m,n} = u^k_{m,n} - \frac{r}{p}(f^k_{m,n} - f^k_{m-1,n}) - \frac{r}{q}(g^k_{m,n} - g^k_{m,n-1}) - rh^k_{m,n}$$

この式に Taylor の定理を適用して

(3.3) $$u^{k+1}_{m,n} = [1 - \frac{r}{p}f_u(kr,(m-1)p,nq,\tilde{u}) - \frac{r}{q}g_u(kr,mp,(n-1)q,\tilde{u})]u^k_{m,n}$$

$$+\frac{r}{p}f_u(kr,(m-1)p,nq,\tilde{u})u^k_{m-1,n} + \frac{r}{q}g_u(kr,mp,(n-1)q,\tilde{u})u^k_{m,n-1}$$

$$-r\,[f_x + g_y + h]^k_{m,n} + r\frac{p}{2}\{\tilde{f}_{xx} + \tilde{g}_{yy}\}$$

となる。ここで $\tilde{u}$, $\bar{u}$ はそれぞれ $u^k_{m,n}$ と $u^k_{m-1,n}$, $u^k_{m,n}$ と $u^k_{m,n-1}$ の適当な中間の値、$\tilde{f}_{xx}$ と $\tilde{g}_{yy}$ は考えている領域 $\Omega$ 内の適当な点での $f_{xx}$, $g_{yy}$ の値を表わす。

以下、いつでも～をつけた時は、$\Omega$ 内の適当な点でのその関数の値を表わす（同じ式内に同じ関数に～をつけた項が2つ以上ある場合、必ずしも同じ量を表わすとは限らない）とする。

(3.1) より，(3.3) の右辺の $u_{ij}^k$ の係数はすべて負ではなく，その和は 1 に等しい。

従って，p,q を十分小さくして

$$\frac{p}{2}\max_{\Omega}|f_{xx}| + \frac{q}{2}\max_{\Omega}|g_{yy}| < \alpha$$

を満たすようにすれば

(3.4) $$M^{k+1} \leq M^k + r(V(M^k) + \alpha)$$

ここで $$M^j = \max_{m,n} |u_{m,n}^j|$$

(2.4), (3.4) より Douglis [2; Th.5.1] とまったく同様に，この補題は証明出来る。

以下においては，常に補題 1 は成立しているものとして，議論を進めることにする。

(3.5) $$v_{m,n}^k = \frac{u_{m+1,n}^k - u_{m,n}^k}{p} \qquad w_{m,n}^k = \frac{u_{m,n+1}^k - u_{m,n}^k}{q}$$

とおけば

補題 2、 $p < \delta r,\ q < \delta' r$ ならば

(3.6) $$\sum_{\substack{|m|p \leq X \\ |n|q \leq Y}} \{|v_{m,n}^k| + |w_{m,n}^k|\}pq \leq \Big[\sum_{\substack{-X-\delta kr \leq mp \leq X \\ -Y-\delta kr \leq nq \leq Y}} \{|v_{m,n}^0| + |w_{m,n}^0|\}pq + \frac{D}{C}\Big]e^{Ckr} - \frac{D}{C}$$

ただし、 $D = (2X+k\ r)(wY+k\ 'r)(D'+D'')$

$D' = (p/q)\|g_{xx}\| + \|g_{xy}\| + \|h_x\| + 2\|f_{xx}\|$

$D'' = (q/p)\|f_{yy}\| + \|f_{xy}\| + \|h_y\| + 2\|g_{yy}\|$

$C = \max\ (\|f_{xu}\| + \|f_{yu}\| + \|h_u\|, \|g_{xu}\| + \|g_{yu}\| + \|h_u\|)$

ここで $\|\cdot\| = \max_{\Omega} |\cdot|$

証明. (3.2), (3.5) より

$$v^{j+1}_{m,n} = v^j_{m,n} - \frac{r}{p^2}(f^j_{m+1,n} - 2f^j_{m,n} + f^j_{m-1,n})$$
$$- \frac{r}{pq}(g^j_{m+1,n} - g^j_{m+1,n-1} - g^j_{m,n} - g^j_{m,n-1}) - \frac{r}{p}(h^j_{m+1,n} - h^j_{m,n})$$

この式に Taylor の定理を用いて

(3.7)
$$v^{j+1}_{m,n} = v^j_{m,n} - \frac{r}{p}\alpha^j_{m,n}v^j_{m,n} + \frac{r}{p}\alpha^j_{m-1,n}v^j_{m-1,n} - \frac{r}{p}[(f_x)^j_{m+1,n} - (f_x)^j_{m,n}]$$
$$+ \frac{r}{2}\{f_{xx} + f_{xx}\} - \frac{r}{q}\gamma^j_{m,n}v^j_{m,n} + \frac{r}{q}\gamma^j_{m,n-1}v^j_{m,n-1}$$
$$- \frac{r}{q}[(g_x)^j_{m,n} - (g_x)^j_{m,n-1}] - \frac{rp}{2q}\{g_{xx} - g_{xx}\} - rh_u v^j_{m,n} - rh_x$$

上式中で、

$$\alpha^j_{m,n} = \begin{cases} (f(jr,mp,nq,u^j_{m+1,n}) - f^j_{m,n}) \big/ (u^j_{m+1,n} - u^j_{m,n}) & u^j_{m+1,n} \neq u^j_{m,n} \\ (f_u)^j_{m,n} & u^j_{m+1,n} = u^j_{m,n} \end{cases}$$

$$\gamma^j_{m,n} = \begin{cases} (g^j_{m+1,n} - g(jr,(m\ 1)p,nq,u^j_{m,n}) \big/ (u^j_{m+1,n} - u^j_{m,n}) & u^j_{m+1,n} \neq u^j_{m,n} \\ (g_u)^j_{m+1,n} & u^j_{m+1,n} = u^j_{m,n} \end{cases}$$

(3.7) 式の [ ] の項に平均値の定理を適用し、(3.1) 式と $\alpha^{j}_{m,n}$ , $\gamma^{j}_{m,n}$ の定義を考慮に入れて、両辺の絶対値をとれば

$$(3.8)\quad |v^{j+1}_{m,n}| \leq [1-\frac{r}{p}\alpha^{j}_{m,n}-\frac{r}{q}\gamma^{j}_{m,n}+r(\|f_{xu}\|+\|h_{u}\|)]|v^{j}_{m,n}| +\frac{r}{p}\alpha^{j}_{m-1,n}|v^{j}_{m-1,n}|+\frac{r}{q}\gamma^{j}_{m,n-1}|v^{j}_{m,n-1}|+r\|g_{xu}\||w^{j}_{m,n-1}|+rD'$$

同様にして

$$(3.8)'\quad |w^{j+1}_{m,n}| \leq [1-\frac{r}{q}\beta^{j}_{m,n}-\frac{r}{p}\delta^{j}_{m,n}+r(\|g_{yu}\|+\|h_{u}\|)]|w^{j}_{m,n}| +\frac{r}{q}\beta^{j}_{m,n-1}|w^{j}_{m,n-1}|+\frac{r}{p}\delta^{j}_{m-1,n}|w^{j}_{m-1,n}|+r\ f_{yu}\ |v^{j}_{m-1,n}|+rD''$$

ここで

$$\beta^{j}_{m,n}=\begin{cases}(g(jr,mp,nq,u^{j}_{m,n+1})-g^{j}_{m,n})/(u^{j}_{m,n+1}-u^{j}_{m,n}) & u^{j}_{m,n+1}\neq u^{j}_{m,n}\\ (g_{u})^{j}_{m,n} & u^{j}_{m,n+1}=u^{j}_{m,n}\end{cases}$$

$$\delta^{j}_{m,n}=\begin{cases}(f^{j}_{m,n+1}-f(jk,mp,(n+1)q,u^{j}_{m,n}))/(u^{j}_{m,n+1}-u^{j}_{m,n}) & u^{j}_{m,n+1}\neq u^{j}_{m,n}\\ (f_{u})^{j}_{m,n+1} & u^{j}_{m,n+1}=u^{j}_{m,n}\end{cases}$$

(3.8) (3.8)' より

$$(3.9)\quad \sum_{\substack{X'\leq mp\leq X\\ Y'\leq nq\leq Y}}\{|v^{j+1}_{m,n}|+|w^{j+1}_{m,n}|\}pq \leq \sum_{\substack{X'-p\leq mp\leq X\\ Y'-q\leq nq\leq Y}}\{|v^{j}_{m,n}|+|w^{j}_{m,n}|\}pq[1+rC] +r(D'+D'')(X-X')(Y-Y')$$

が成り立つ、ここで $N^{j} = \sum_{\substack{-X-(k-j)p\leq mp\leq X\\ -Y-(k-j)q\leq nq\leq Y}}\{|v^{j}_{m,n}|+|w^{j}_{m,n}|\}pq$

とおけば

(3.9) より

$$N^j \le N^{j-1}[1 + rC] + Dr \quad 1 \le j \le k$$

故に

$$N^k \le N^0[1+rC]^k+\frac{D}{C}\{[1+rC]^k-1\} \le [N^0+\frac{D}{C}]e^{Ckr}-\frac{D}{C}$$

この式と条件 $p < \delta r$, $q < \delta' r$ より (3.6) が成り立つ。

補題 3. $p < \delta r$, $q < \delta' r$ ならば

$$\sum_{\substack{|m|p \le X \\ |n|q \le Y}} |u^k_{m,n}-u^j_{m,n}|pq \le (k-j)rE, \quad 0 \le j \le k \tag{3.10}$$

ここで $E = \max(\delta,\delta')F + 4XY(V(M) + \alpha)$, F は (3.6) 式の右辺.

証明. (3.3) 式を前補題の証明中の記号を用いて、書き変えれば.

$$u^j_{m,n} - u^{j-1}_{m,n} = -r\alpha^{j-1}_{m-1,n}v^{j-1}_{m-1,n} - r\beta^{j-1}_{m,n-1}w^{j-1}_{m,n-1}$$
$$- r[f_x + g_y + h]^{j-1}_{m,n} + r\{\frac{p}{2}\tilde{f}_{xx} + \frac{q}{2}\tilde{g}_{yy}\}$$

$\alpha^j_{m,n}$ $\beta^j_{m,n}$ の定義と (3.1) より

$$|u^j_{m,n}-u^{j-1}_{m,n}| \le \max(\delta,\delta')r\{|v^{j-1}_{m,n}|+|w^{j-1}_{m,n}|\}+r[V(M)+\alpha]$$

従って補題2より

$$\sum_{\substack{|m|p\le X\\|n|q\le Y}} |u^j_{m,n}-u^j_{m,n}|pq \le r\max(\delta,\delta')\left\{\sum_{\substack{-X-p\le mp\le X\\-Y-q\le nq\le Y}}\{|v^{j-1}_{m,n}|+|w^{j-1}_{m,n}|\}pq\right\}$$

$$+\, r4XY[V(M)+\alpha] \leqq rE$$

$$\text{for}\quad 1\le j\le k$$

故に

$$\sum_{\substack{|m|p\le X\\|n|q\le Y}} |u^k_{m,n}-u^j_{m,n}|pq \le \sum_{\ell=j+1}^{k}\ \sum_{\substack{|m|p\le X\\|m|q\le Y}} |u^{\ell}_{m,n}-u^{\ell-1}_{m,n}|pq$$

$$\le \sum_{\ell=j+1}^{k} rE = (k-j)rE\ .$$

4.　定理の証明。

前節の3つの補題に基づいて Conway & Smoller [1] の第3節とまったく同様に、定理は証明出来る。

今、格子領域 $G_{p,q,r}$ 上の差分方程式 (2.8) の解 $u^k_{m,n}$ を

$$U(t,x,y) = u^k_{m,n} \tag{4.1}$$

$$\text{for} \quad kr \leq t < (k+1)r,\ mp \leq x < (m+1)x,\ nq \leq y < (n+1)q$$

によって定義される階段関数であると考えれば、補題 1, 2, 3 より、[1] の第3節の如くにして次のようなことが結論される。

すなわち、$u_0 \in \mathcal{F}$ ならば条件、

$$\frac{p_i}{r_i}A + \frac{q_i}{r_i}B < 1,\quad p_i < \delta r_i,\quad q_i < \delta' r_i,\quad \frac{q_i}{p_i} = \text{const} > 0 \quad \lim_{i=\infty} r_i = 0$$

を満たす適当な格子領域の列 $G_i = G_{p_i,r_i,q_i}$, $i = 1,2,\ldots$ とそれらの上での差分方程式 (2.8) の適当な解 $U^i(t,x,y)$, $i = 1,2,\ldots$ が存在して、任意に固定した $t$ $(0 \leq t \leq T)$ に対して、$U^i(t,x,y)$ はある $u(t,x,y) \in \mathcal{F}$ に、$t$ に関して一様に任意の $R^2$ のコンパクト集合の上で、$L^1$ の意味で収束する。ここで $u(t,x,y)$

は G で Tonelli-Cesari の意味で局所有界変動である。更に $U^i(0,x,y)$ は上と同じ意味で $u_0(x,y)$ に収束する。

したがって、定理の証明のためには、このようにして得られた関数 $u(t,x,y)$ が、(2.1), (2.2) の weak solution であることを示せばよい。これは次の補題から、ただちに得られる。

補題4． $u(t,x,y)$ は，$t=T$ で $0$ であるような任意の関数 $\phi=\phi(t,x,y)\in C_0^3$ に対して 関係式

$$(2.7)\qquad \iiint_G [u\phi_t + f\phi_x + g\phi_y - h\phi]\,dxdydt + \iint_{t=0} u_0(x,y)\phi(0,x,y)\,dxdy = 0$$

を満たす。

証明． (2.8) 式に $\phi_{m,n}^k$ をかければ，

$$\phi_{m,n}^k\left(\frac{u_{m,n}^{k+1}-u_{m,n}^k}{r}+\frac{f_{m,n}^k-f_{m-1,n}^k}{p}+\frac{g_{m,n}^k-g_{m,n-1}^k}{q}+h_{m,n}^k\right)=0$$

この式を変形して

$$(4.2)\quad -u^{k+1}_{m,n}\frac{{}^{k+1}_{m,n}-{}^{k}_{m,n}}{r}+\frac{1}{r}(u^{k+1}_{m,n}\,{}^{k+1}_{m,n}-u^{k}_{m,n}\,{}^{k}_{m,n})-f^{k}_{m,n}\frac{{}^{k}_{m,n}-{}^{k}_{m,n}}{p}$$

$$+\frac{1}{p}(\phi^{k}_{m+1,n}f^{k}_{m,n}-\phi^{k}_{m,n}f^{k}_{m-1,n})-g^{k}_{m,n}\left(\frac{\phi^{k}_{m,n+1}-\phi^{k}_{m,n}}{q}\right)$$

$$+\frac{1}{q}(\phi^{k}_{m,n+1}g^{k}_{m,n}-\phi^{k}_{m,n}g^{k}_{m,n-1})+\phi^{k}_{m,n}h^{k}_{m,n}=0$$

φのえらび方より、十分大きな m, n に対して $\phi^{k}_{m,n}=0$，又 r が十分小さければ $\varphi^{k_0}_{m,n}=0$, $k_0=[T/r]$ であることを考慮に入れて、(4.2) 式に pqr をかけて m , n , k , ( $0\le k<[T/r]$, $-\infty<m,n<\infty$ ) に関して和をとれば、

$$(4.3)\quad -\sum_{m,n,k}u^{k+1}_{m,n}\frac{\phi^{k+1}_{m,n}-\phi^{k}_{m,n}}{r}pqr-\sum_{m,n}u^{0}_{m,n}\phi^{0}_{m,n}pq-\sum_{m,n,k}f^{k}_{m,n}\frac{\phi^{k}_{m+1,n}-\phi^{k}_{m,n}}{p}pqr$$

$$-\sum_{m,n,k}g^{k}_{m,n}\frac{\phi^{k}_{m,n+1}-\phi^{k}_{m,n}}{q}+\sum_{m,n,k}h^{k}_{m,n}\phi^{k}_{m,n}pqr=0$$

u(t,x,y) が，この補題の前で述べた様な意味で (2.8) 式の解の列の極限であるから、φ の support の上で $U^i(t,x,y)$ は u(t,x,y) に $L^1$ の意味で収束し，φ(0,x,y) の support の上で $U^i(0,x,y)$ は $u_0(x,y)$ に、$L^1$ の意味で収束する。

これらのことから、求める関係式 (2.7) は得ら

れる。詳細な証明については、 Oleinik [3] の補題7を参照されたい。

## 参考文献

[1] E. Conway & J. Smoller, Global Solutions of the Cauchy Problem for First-Order Equations in Several Space Variables, Comm. Pure Appl. Math. Vol.19, 1966, pp.95-105.

[2] A. Douglis, On Caluculating Weak Solutions of Quasi-Linear First-Order Partial Differential Equations, Contributions to Diff. Eqns, Vol.1, 1963, pp.59-94.

[3] O.A. Oleinik, Discontinuous solutions of nonlinear differential equations, Uspekhi. Mat. Nauk, Vol.12, 1957, pp.3-73. English translation, Amer. Math. Soc. Trans, Ser.2, No.26, pp.95-172.

[4] N.D. Vvedenskaya, The difference method solution of Cauchy's problem for non-linear equation with discontinuous initial values, Doklady Acad. Nauk. S. S. S. R, Vol.111, 1956, pp.517-521.